

REDUCCIÓN DE ORDEN DE CONTROLADORES H_∞ Y H_2 MEDIANTE TÉCNICAS QFT

Mario García-Sanz
Javier Castillejo
Javier Villanueva
Igor Egaña
Pablo Vital

Departamento de Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía
31006 Pamplona, España.
E-mail: mgsanz@unavarra.es

Resumen

Los reguladores diseñados mediante las teorías de control robusto H_∞ y H_2 suelen mostrar el inconveniente de poseer una expresión matemática de orden elevado. Debido al difícil problema de operatividad del controlador que ello plantea, en los últimos años han aparecido diversas técnicas de reducción de orden. En este contexto, el presente trabajo utiliza las herramientas propias del diseño en QFT (Quantitative Feedback Theory) para reducir el orden de dichos controladores, manteniendo las especificaciones de comportamiento del diseño inicial. En el artículo se describe el nuevo método y se ilustra con varios ejemplos.

Palabras Clave: Control Robusto, Reducción de Orden, QFT, Control H_∞ , Control H_2 .

1 INTRODUCCIÓN

Las teorías de control robusto H_∞ y H_2 , nacidas en los años 80, permiten calcular controladores capaces de gobernar procesos a pesar de la incertidumbre existente, buscando un compromiso entre el seguimiento de referencia a bajas frecuencias, y el rechazo de perturbaciones a altas.

Dichos métodos presentan la ventaja de que, una vez definidas las funciones de ponderación de las sensibilidades, la obtención del controlador resulta de un proceso iterativo que consigue un sistema muy próximo al óptimo.

Sin embargo, estas técnicas tienen el inconveniente de obtener un controlador de orden elevado. La implementación práctica de los reguladores con un gran número de elementos resulta problemática

debido a que el orden del controlador, una vez en el dominio discreto, está directamente relacionado con el número de periodos de muestreo que tarda en estar completamente operativo. Además, si la forma discretizada contiene referencias a un gran número de valores adquiridos en instantes anteriores, se obliga al procesador a realizar una cantidad de cálculos mayor de la que sería necesaria con un controlador más simple, por lo que se necesita, generalmente, mayor precisión en las operaciones.

Para evitar estos inconvenientes, en la última década han aparecido varios métodos de reducción de orden ([1], [2], [5] – [7], [9] – [12]), basados en aproximar la dinámica del controlador inicial en un rango de frecuencias o en obtener un controlador que minimice una norma encargada de medir la diferencia (en términos frecuenciales) entre controladores. Sin embargo, estos métodos no garantizan que el controlador reducido cumpla las especificaciones del diseño inicial, y como alternativa se ha desarrollado una nueva metodología basada en técnicas QFT (Quantitative Feedback Theory) [3], [8], orientada a buscar un controlador que mantenga dichas especificaciones de comportamiento, por encima de la semejanza entre controladores.

2 PLANTEAMIENTO DEL MÉTODO

2.1 VISIÓN GENERAL

El proceso para reducir el orden comienza definiendo un conjunto representativo de frecuencias en las que evaluar el comportamiento del controlador. Para estas frecuencias se determinan los valores en módulo de las especificaciones de comportamiento que cumple el conjunto controlador H_∞/H_2 - planta original. Dependiendo de las características de la planta (presencia y tipo de incertidumbre asociada) y de los

requerimientos de diseño, será necesario utilizar una mayor o menor cantidad de especificaciones, aunque como mínimo siempre será necesario definir valores para las correspondientes a la función de sensibilidad y de sensibilidad complementaria.

Una vez obtenidos los valores en módulo de las especificaciones a las frecuencias elegidas, se llevan al entorno de diseño de QFT en forma de zonas de exclusión (*bounds*), junto con las expresiones polinómicas del controlador y la planta. En este entorno se procede a eliminar de forma manual o automática términos del controlador, ajustando el resto de los elementos a fin de mantener las condiciones de diseño. Los siguientes apartados detallan los principales pasos, y los ejemplos de la siguiente sección explican el conjunto de forma práctica.

2.2 ESPECIFICACIONES QFT

A fin de poder trabajar con el controlador H_∞/H_2 dentro del entorno de QFT, es necesario obtener primero las especificaciones que cumple. El diagrama general en el que se basa la teoría de QFT puede verse en la figura 1.

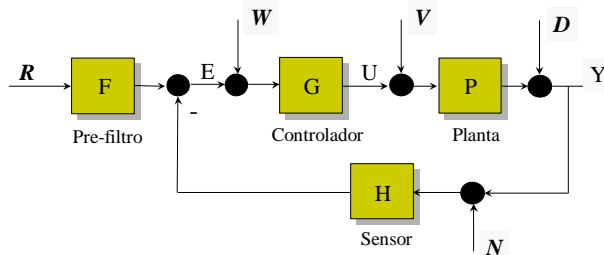


Figura 1: Esquema general del sistema de control de los grados de libertad utilizado por QFT

Puesto que se va a partir de un regulador H_∞/H_2 , es de esperar que el controlador QFT resultante tenga unas propiedades similares al inicial, por lo que en este caso no es necesaria la utilización del pre-filtro F , ya que el propio controlador se encarga de obtener el seguimiento de referencia adecuado.

Las especificaciones que pueden incluirse en el diseño de reguladores SISO son las que muestra la tabla 1.

Dado que se va a trabajar sin utilizar la dinámica del sensor ($H = 1$), las especificaciones a utilizar para un diseño H_∞/H_2 serán las de Tipo 1, y Tipo 2. Para ciertos modelos de incertidumbre podrá utilizarse también la Tipo 3.

Para cada una de las frecuencias elegidas se procede a buscar la especificación que cumple el conjunto controlador H_∞/H_2 – planta original. Este proceso lleva a la obtención de un conjunto de *bounds* en el

diagrama de Nichols que limitan las zonas de paso de la representación del sistema en lazo abierto.

Tabla 1: Especificaciones QFT

Tipo	Especificación	Nombre
1	$\left \frac{PGH}{1+PGS} \right \leq W_{S_1}$	Sensibilidad complementaria
2	$\left \frac{1}{1+PGH} \right \leq W_{S_2}$	Sensibilidad
3	$\left \frac{P}{1+PGH} \right \leq W_{S_3}$	Rechazo de perturbaciones a la entrada de la planta
4	$\left \frac{G}{1+PGH} \right \leq W_{S_4}$	Esfuerzo de control
5	$\left \frac{GH}{1+PGH} \right \leq W_{S_5}$	Esfuerzo de control con dinámica sensor
6	$\left \frac{PG}{1+PGH} \right \leq W_{S_6}$	Ancho de banda del seguimiento de referencia
7	$W_{S_{7a}} \leq \left \frac{PG}{1+PGH} \right \leq W_{S_{7b}}$	Seguimiento de referencia
8	$\left \frac{H}{1+PGH} \right \leq W_{S_8}$	Rechazo de perturbaciones a la salida de la planta
9	$\left \frac{PH}{1+PGH} \right \leq W_{S_9}$	Rechazo de perturbaciones a la entrada de la planta con dinámica sensor.

2.3 INCLUSIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

Según el modelo de incertidumbre que tenga la planta del sistema a controlar, se podrá introducir de diversas formas, teniendo en cuenta que pueden darse simultáneamente.

2.3.1 Incertidumbre no estructurada

Como norma general, la forma de introducir la información disponible sobre una incertidumbre no estructurada será calcular un radio de incertidumbre para cada una de las frecuencias de diseño. El valor de este radio debe ser calculado a partir de los parámetros inciertos de la planta. Para los casos en que la incertidumbre se modele como simple ruido (aditivo o multiplicativo) a la entrada o a la salida de la planta, es posible considerar este ruido como perturbaciones e incluirlo en las especificaciones Tipo 2 o Tipo 3, y trabajar con una planta sin incertidumbre, puesto que así se evita realizar este paso.

2.3.2 Incertidumbre estructurada

La incertidumbre estructurada o paramétrica se define como uno o varios parámetros variables a la hora de introducir la función de la planta en el entorno QFT.

3 EJEMPLOS

A fin de comentar detalladamente el proceso a seguir, se van a realizar dos ejemplos completos.

3.1 EJEMPLO 1

Este ejemplo utiliza uno de los controladores H_∞ de la Toolbox de Control Robusto de Matlab® [4]. La planta a controlar tiene la estructura de la figura 2 y la forma polinómica de la función de transferencia (1).

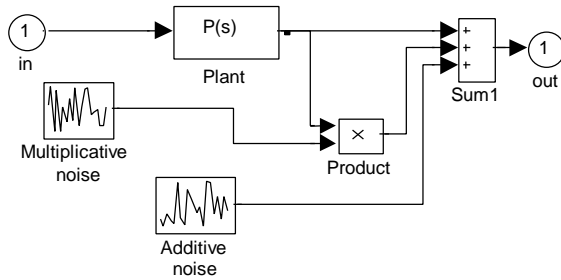


Figura 2: Planta a controlar

$$P(s) = \frac{7.5617s^3 + 51.0814s^2 + 142.7998s + 97.2218}{s^4 + 5.6266s^3 + 46.34s^2 + 145.2906s + 97.2269} \quad (1)$$

El controlador inicial, presentado en la bibliografía [4], se muestra en la ecuación 2.

$$G_{H_\infty}(s) = \frac{a_7s^7 + a_6s^6 + a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}{b_8s^8 + b_7s^7 + b_6s^6 + b_5s^5 + b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a_7 &= 0.0005875 & a_6 &= 0.18486 \\ a_5 &= 2.6403 & a_4 &= 18.864 \\ a_3 &= 108.11 & a_2 &= 314.21 \\ a_1 &= 359.51 & a_0 &= 137.01 \\ b_8 &= 0.000001 & b_7 &= 0.000871 \\ b_6 &= 0.070756 & b_5 &= 0.56261 \\ b_4 &= 1.9281 & b_3 &= 2.7797 \\ b_2 &= 1.4248 & b_1 &= -0.17281 \\ b_0 &= -0.25298 \end{aligned}$$

Los datos del controlador y la planta se llevan al entorno de QFT. La incertidumbre de la planta, por tratarse de ruido, se incluye dentro de las especificaciones de sensibilidad. Las frecuencias elegidas, así como las especificaciones resultantes se pueden ver en la tabla 2.

La representación en el diagrama de Nichols de la función de transferencia del conjunto controlador H_∞ -planta, así como los *bounds* correspondientes a la tabla 2 son mostrados en la figura 3.

Tabla 2: Especificaciones del conjunto controlador H_∞ - planta.

$w(\text{rad/s})$	Tipo 1	Tipo 2
1	1.008	0.009
2	1.027	0.027
4	1.09	0.1
8	1.23	0.37
16	1.25	0.9
64	--	1.17
256	--	1.027
1024	--	1.0035
4026	--	1.0003

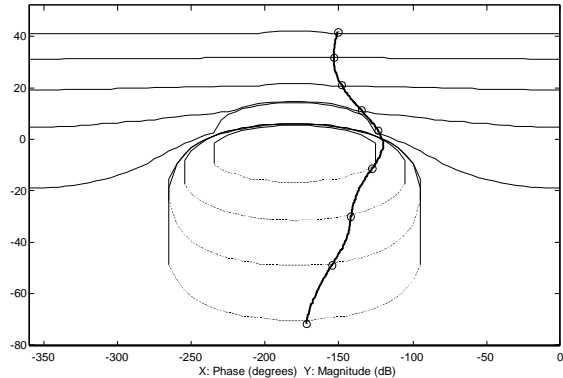


Figura 3: Sistema inicial. $P(s) G_{H_\infty}(s)$

En este punto se procede a reducir el orden del controlador. Utilizando herramientas automáticas y manuales, se llega en una primera aproximación a un controlador de orden 3 que obtiene los resultados que pueden verse en la figura 4.

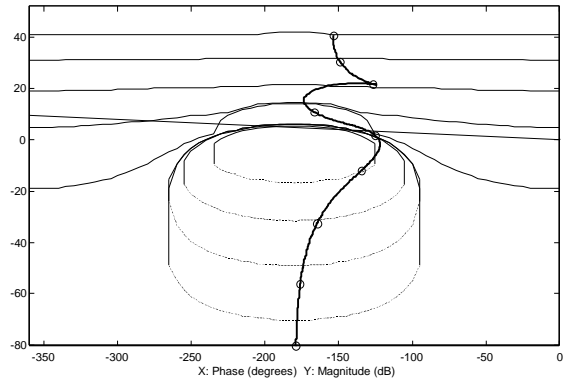


Figura 4: Reducción inicial. $P(s) G_{\text{reducido-1}}(s)$

Los puntos correspondientes a las frecuencias 8, 16 y 64 rad/s no cumplen las áreas de restricción, por lo que es necesario modificar el controlador. Añadiendo un nuevo cero, y variando levemente el resto de los componentes, se llega a la solución final, que se muestra en la figura 5.

La función de transferencia del controlador reducido es:

$$G_{QFT}(s) = \frac{s^3 + 286s^2 + 1471s + 13737}{s^3 + 66.7083s^2 + 50.5547s - 25.3633} \quad (3)$$

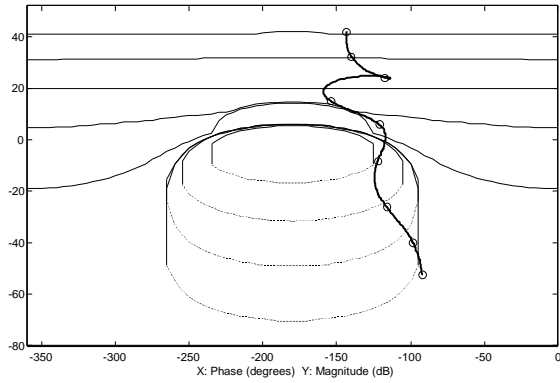


Figura 5: Solución final. $P(s)G_{QFT}(s)$

La respuesta a una entrada escalón del sistema con el controlador inicial y el final, así como la orden de control de ambos, se muestran en las figuras 6 y 7. Queda patente la similitud del comportamiento de ambos controladores.

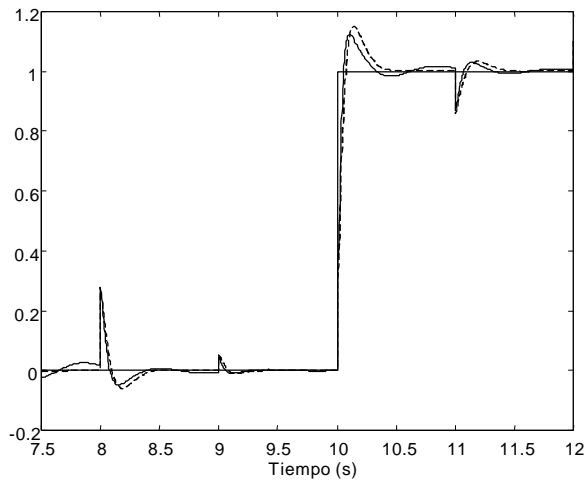


Figura 6. Respuesta del sistema a una entrada escalón. Línea continua: G_{QFT} , línea discontinua: G_{HX}

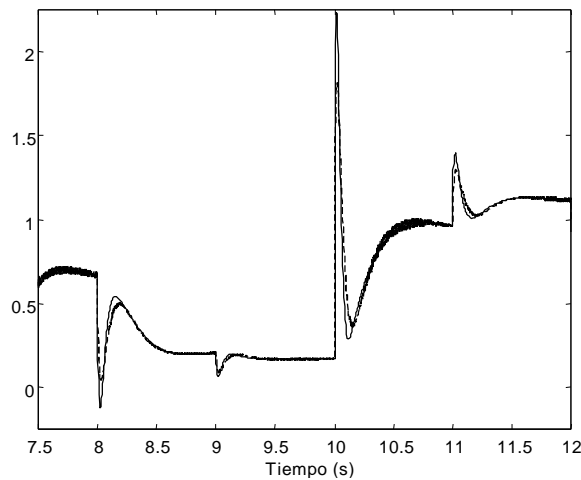


Figura 7. Acción de control para entrada en escalón. Línea continua: G_{QFT} , línea discontinua: G_{HX}

3.2 EJEMPLO 2

El ejemplo 2 utiliza un controlador H_2 para la misma planta del ejemplo 1. El proceso a seguir en este caso va a ser similar al anterior, con la diferencia de que la incertidumbre de la planta va a ser introducida como incertidumbre no estructurada, por lo que se hace necesario calcular los radios de incertidumbre para las distintas frecuencias a evaluar. El valor de estos radios se puede ver en la tabla 3.

El controlador original, presentado en la bibliografía [4], se muestra en la ecuación 4:

$$G_{H2}(s) = \frac{a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_7 s^7 + b_6 s^6 + b_5 s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a_6 &= 0.06 & a_5 &= 0.82 \\ a_4 &= 5.87 & a_3 &= 33.86 \\ a_2 &= 99.02 & a_1 &= 113.69 \\ a_0 &= 43.42 & b_7 &= 0.0008 \\ b_6 &= 0.0338 & b_5 &= 0.2859 \\ b_4 &= 1.1612 & b_3 &= 2.4283 \\ b_2 &= 2.687 & b_1 &= 1.5019 \\ b_0 &= 0.335 \end{aligned}$$

Las frecuencias a evaluar, así como las especificaciones y los radios de incertidumbre son las que muestra la tabla 3.

Tabla 3: Especificaciones y radios de incertidumbre del sistema controlador H_2 - planta original.

w(rad/s)	Tipo 1	Tipo 2	R
1	1.006	--	0.3938
2	1.04	--	0.3949
4	1.22	--	0.4839
8	1.8	--	0.4053
16	1.9	1.75	0.2586
64	--	1.16	0.2503
256	--	1.012	0.25
1024	--	1.0013	0.25
4026	--	1.0001	0.25

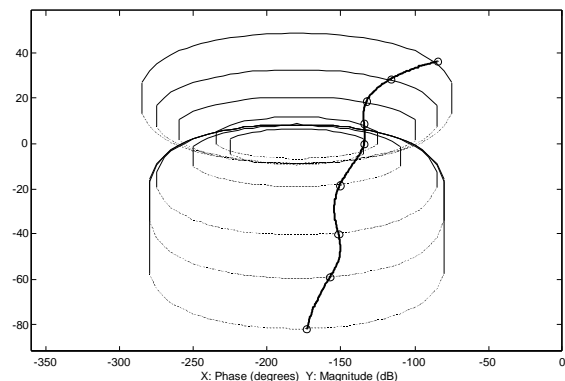


Figura 8: Sistema inicial. $P(s)G_{H2}(s)$

La representación en el diagrama de Nichols del sistema controlador H_2 - planta, así como los *bounds*

correspondientes a la tabla 3, se pueden ver en la figura 8.

Tras una primera reducción se llega a un controlador de orden 3 que cumple las especificaciones, aunque debido a la forma resultante, para frecuencias que se encuentren entre 4 y 8 rad/s puede incumplir los límites establecidos en el modelo inicial, como se ve en la figura 9.

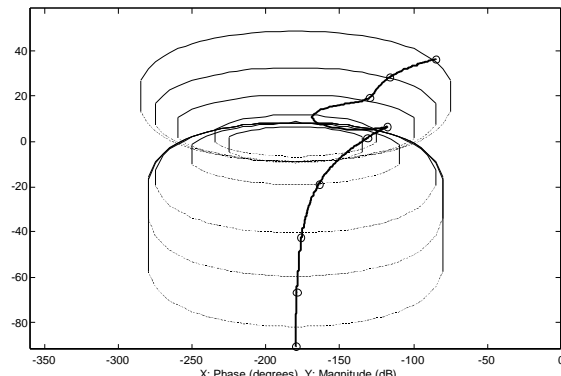


Figura 9: Reducción inicial. $P(s) G_{reducido-1}(s)$

Para mejorar el comportamiento del controlador en dicho rango de frecuencias, se modifican manualmente sus elementos, hasta llegar a una solución más adecuada (figura 10).

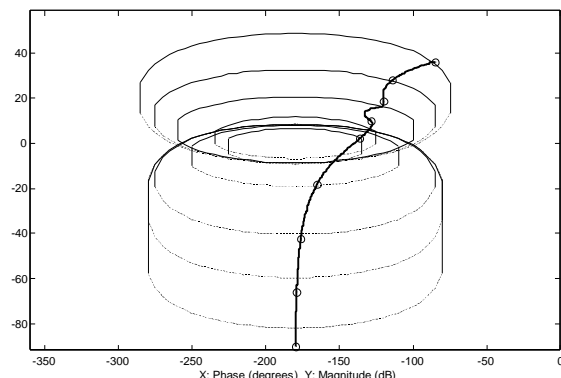


Figura 10: Solución final. $P(s) G_{QFT}(s)$

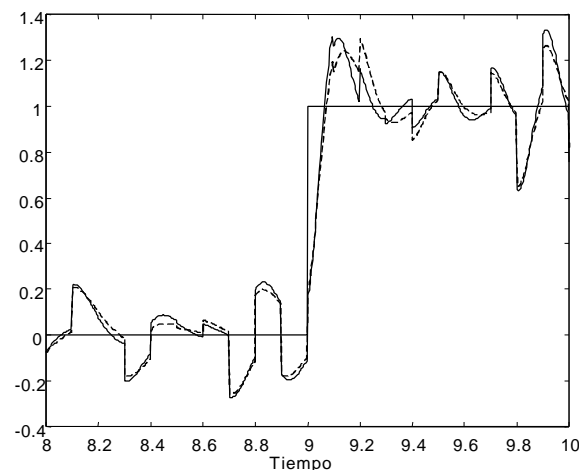


Figura 11: Respuesta del sistema a una entrada escalón. Línea continua: G_{QFT} , línea discontinua: G_{H2}

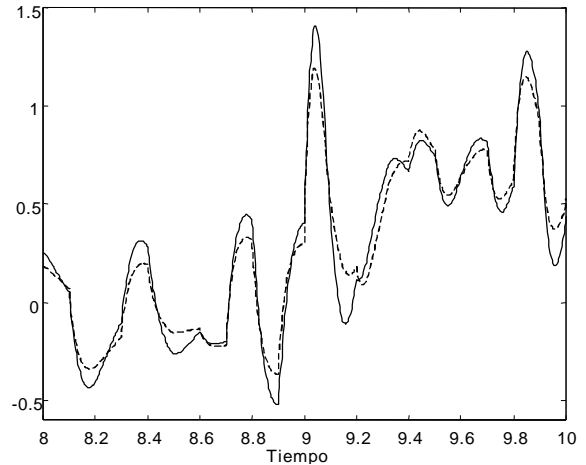


Figura 12: Acción de control para entrada en escalón. Línea continua: G_{QFT} , línea discontinua: G_{H2}

El controlador resultante es el que muestra la ecuación 5. Las figuras 11 y 12 muestran la respuesta de los sistemas con el controlador inicial y el final. Queda patente la similitud del comportamiento de ambos controladores.

$$G_{QFT}(s) = \frac{67.6s^2 + 145.14s + 2665.7}{s^3 + 20.3818s^2 + 40.0068s + 20.5655} \quad (5)$$

4 CONCLUSIONES

El presente artículo ha presentado una nueva técnica de reducción del orden de controladores basada en la utilización conjunta de los métodos tradicionales y de las herramientas QFT. La principal ventaja de este nuevo método, en comparación con los encontrados en la bibliografía, es que el controlador reducido se diseña para cumplir las mismas especificaciones frecuenciales del sistema inicial, mientras que los otros métodos pretenden generalmente obtener un controlador de dinámica semejante al original, lo cual no suele garantizar el cumplimiento de dichas especificaciones.

Otra ventaja de este método es su carácter visual e intuitivo, ya que da al diseñador la posibilidad de observar de forma gráfica e inmediata las prestaciones y características del controlador, pudiendo decidir en un momento dado que determinadas limitaciones en determinadas frecuencias pueden relajarse, en beneficio de una mayor sencillez en el controlador.

Agradecimientos

Los autores agradecen la ayuda prestada por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) bajo el proyecto TAP'97-0471.

Referencias

- [1] Anderson, B. D. O. (1986). *Weighted Hankel-norm approximation: Calculation of bounds*, Systems & Control Letters 7(4): 247-255.
- [2] Anderson, B. D. O. And Liu, Y. (1989). *Controller reduction: Concepts and approaches*, IEEE Transactions on Automatic Control 34(8):802-812.
- [3] Borghesani, C., Chait, Y. and Yaniv, O., (1995). *Quantitative Feedback Theory Toolbox – For use with Matlab*. 1st Edition. The Mathworks Inc.
- [4] Chiang,, R. Y. And Safonov, M. G. (1992). *Robust Control Toolbox User’s Guide*, Mathworks, South Natick.
- [5] Enns, D. (1984). *Model reduction with balanced realizations: An error bound and a frequency weighted generalization*, Proceedings of the 23th IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV, USA, pp. 127-32.
- [6] Fernando, K. V. And Nicholson, H. (1982). *Singular perturbational model reduction of balanced systems*, IEEE Transactions on Automatic Control AC-27(2):466-468.
- [7] Glover, K. (1984). *All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^{∞} -error bounds*, International Journal of Control 39(6): 1115-93.
- [8] Horowitz, I. (1991). *Quantitative Feedback Design Theory (QFT)*, QFT Publications, Boulder.
- [9] Meyer, D. G. (1987). *Model reduction via Factorial Representation*, PhD thesis, Stanford University.
- [10] Pernebo, L. and Silverman, L. M. (1982). *Model reduction by balanced state space representation*, IEEE Transactions on Automatic Control AC-27(2):382-387.
- [11] Safonov, M. G. and Chiang, R. Y. (1989). *A Schur method for balanced-truncation model reduction*, IEEE Transactions on Automatic Control AC-34: 729-733.
- [12] Samar, R., Postlethwaite, I. and Gu, D.-W. (1995). *Model reduction with balanced realizations*, International Journal of Control 62(1):33-64.
- [13] Skogestad, S. And Postlethwaite, I. (1996), *Multivariable Feedback Control*, Wiley & Sons, England.