ANÁLISIS Y DISEÑO DE REGULADORES DE VELOCIDAD DE ACCIÓN DIRECTA

JUAN MORENO, MANUEL REINO & MIGUEL ANGEL JARAMILLO
Departamento de Ingeniería Electrónica y Electromecánica. Escuela de Ingenierías Industriales.UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA. Ctra. de Olivenza, s/n BADAJOZ, ESPAÑA. E-mail: miguel@ba.unex.es

Resumen

En este trabajo se analiza el comportamiento de controladores de velocidad ded acción directa que se usan fundamentalmente en máquinas térmicas e hidráulicas. Se estudia la posibilidad de linealizar las ecuaciones y se discuten las limitaciones de las herramientas de la Teoría de Sistemas Lineales aplicadas a este caso. Se propone para finalizar una estrategia que permite el análisis y estudio de sistemas más complejos.

Palabras clave: Reguladores de velocidad, sistemas no lineales.

1.- INTRODUCCIÓN.-

Los reguladores de velocidad de acción directa se utilizan para mantener la velocidad de una máquina o mecanismo dentro de unos límites de tolerancia que, en general, están relacionados con unos requerimientos de calidad determinados. Se aplican en sistemas tales como motores endotérmicos, turbinas, máquinas hidráulicas, etc., que son sometidas a variaciones de carga acíclicas, aunque sus propiedades también son aprovechadas para la medición de velocidades y aceleraciones (tacómetros y acelerómetros).

En síntesis, el regulador de velocidad es un sistema de control automático con realimentación: hay una variable a controlar (la velocidad de la máquina), una señal de entrada (las variaciones de velocidad) y una señal de salida (el movimiento del distribuidor o controlador de potencia). La relación entre estas señales viene determinada por una función de transferencia que, a su vez, está definida por el diseño del mecanismo regulador. En la actualidad existe una gran variedad de diseños, desde los reguladores de contrapesos, reguladores de bolas, de masas deslizantes, etc., que se basan en el efecto de la fuerza centrífuga, hasta reguladores que aprovechan los efectos de la aceleración tangencial.

El diseño del regulador está condicionado por las características de la máquina en la que se instala en cuanto a sus especificaciones de potencia, tamaño, compacidad, calidad de funcionamiento y coste de fabricación. La calidad, por ejemplo, está normalizada en algunas máquinas y definida por cuatro variables que se miden en la respuesta a un cambio de carga:

- El tiempo de respuesta.
- El tiempo de estabilización.
- El valor de cresta o pico.
- El intervalo de velocidades entre la plena carga y la marcha en vacío.

El diseño del regulador deberá, pues, cumplir con una serie de requerimientos para los que habrá que encontrar una solución óptima o, al menos, una solución de compromiso, lo cual no siempre es fácil, habida cuenta de que los requerimientos de las máquinas actuales son notablemente más rigurosos que los de las construidas en la época de Watt.

2.- ESTÁTICA DEL REGULADOR.-

El método más extendido para el diseño de un regulador tiene en general tres fases [4]:

1) Síntesis del mecanismo considerando la geometría de los componentes de la máquina que son afectados por el regulador. Fundamentalmente se trata de una síntesis de posición, para la cual el controlador debe alcanzar determinados puntos según la potencia requerida y la velocidad de la máquina. En esta fase se determinan las dimensiones de los eslabones y las características de transmisión de movimientos.

2) Análisis de la Estática del mecanismo, mediante el estudio de las fuerzas que intervienen en las posiciones de equilibrio. Se determinan en esta fase las características de las masas, muelles y otros elementos relacionados con las fuerzas. Por último, se

definen la curva o curvas características del regulador.
3) Ensayo en banco de pruebas y correcciones posteriores.

Es obvio que estas tres fases de la labor de diseño son insuficientes cuando se pretende alcanzar ciertos grados de calidad, ya que el regulador es un sistema dinámico que suele estar continuamente en movimiento y donde las fuerzas de inercia juegan un papel esencial.

3.- DINÁMICA DEL REGULADOR.-

Considerando su comportamiento dinámico, el regulador es un sistema vibrante. Su vibración suele ser amortiguada y, aunque está sometido a fuerzas externas, éstas no son periódicas y su forma y comportamiento dependen de las características de la máquina. Se dan también en la práctica casos de vibraciones autoexcitadas producidas por aquellas fuerzas.

El análisis dinámico puede realizarse aplicando las leyes de la Mecánica para obtener una o varias ecuaciones diferenciales que definan el movimiento [1]. Estas ecuaciones pueden tratarse posteriormente aplicando la Teoría de Sistemas [3] para estudiar su comportamiento temporal y en frecuencia (estabilidad, frecuencia de oscilación, transitorios, etc.).

Las técnicas de análisis de sistemas automáticos definidos por ecuaciones diferenciales lineales están actualmente muy perfeccionadas por lo que los métodos que se derivan de ellas podrían dar interesantes resultados en algunos reguladores, pero desgraciadamente las ecuaciones que se encuentran al analizar la mayoría de estos mecanismos no suelen ser lineales por lo que, como se verá más adelante, lo más corriente es que el problema tenga que ser abordado en toda su magnitud.

Afortunadamente los medios que actualmente proporciona la Informática permiten un análisis de los sistemas no lineales mediante potentes programas de simulación. Los resultados del presente trabajo han sido obtenidos mediante el programa MATLAB.

4.- ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN REGULADOR

Aunque se podrían definir las ecuaciones generales que determinan el comportamiento dinámico de un regulador de velocidad, dada la gran diversidad de diseños realizados, estas ecuaciones resultarían tan excesivamente abstractas que dificultarían una exposición objetiva del problema. De aquí que se haya preferido analizar un modelo determinado (el que puede considerase como más sencillo) simplificando incluso algunas características de su funcionamiento que no perjudican la filosofía general del diseño [2].
El regulador de la Figura 1 está compuesto por dos masas que giran en un eje acoplado a la máquina y que pueden deslizar por sendas correderas. La fuerza detectora (centrífuga) se compensa con muelles de compresión situados en los brazos.

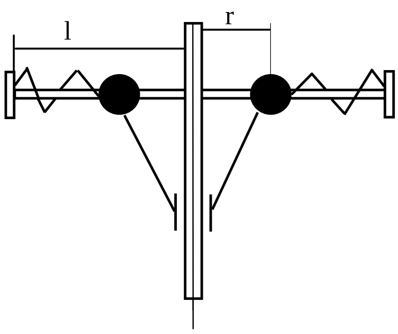


Figura 1: Regulador de Watt

Para una velocidad dada ω, la posición de equilibrio de las masas viene dada por la expresión:

$$m\omega^2 r = K(r + r_0) \qquad (1)$$

donde m es el valor de la masa de los contrapesos, r el radio de giro y r_0 la precompresión de montaje de los muelles. Un análisis de esta ecuación indica que el regulador es isócrono para $r_0=0$ y definitivamente inestable para $r_0>0$. Expresado de otra forma, es preciso que los muelles, en su posición relajada, tengan una longitud menor que l para un funcionamiento adecuado.

Para que el sistema se estabilice en el tiempo será preciso contar con amortiguadores que pueden conectarse en paralelo con los muelles. En muchos casos prácticos estos amortiguadores no existen físicamente, pero se da un efecto de amortiguación en los muelles y rozamientos del mecanismo que compensan esta deficiencia.
La ecuación que define el movimiento de las masas a lo largo de los brazos es la siguiente:

$$m\omega^2 r - K(r + r_0) - C\frac{dr}{dt} = m\frac{d^2 r}{dt^2} \qquad (2)$$

donde C es el coeficiente de amortiguamiento. Se ha cambiado el signo de r_0 para trabajar con valores positivos.

Para resolver esta ecuación es preciso definir las relaciones que existen entre el regulador y la máquina donde se monta. Concretamente, debe existir una relación entre el valor de *r* y la potencia que proporciona el motor de la máquina (relacionada a su vez con la posición del distribuidor) y debe haber también una relación entre la potencia motriz, la potencia resistente y la aceleración angular.

La relación entre la potencia del motor y el valor de *r* puede ser compleja e incluso depender de otras variables tales como la velocidad ω, como ocurre por ejemplo en los motores endotérmicos. De nuevo, para no complicar excesivamente las ecuaciones, se asumirá una relación lineal de estas variables (por otro lado, esta linealidad podría conseguirse con un adecuado diseño de los elementos de transmisión de movimientos del regulador). Un análisis más próximo a la realidad no modificaría el método expuesto, aunque complicaría la forma de las ecuaciones. Asumiendo pues esta linealidad, la relación citada sería de la forma:

$$P_M + Ar = B \qquad (3)$$

donde P_M es la potencia motriz y A y B constantes definidas por las características del motor. Entre el par resistente y el par motor se da la relación:

$$M_M - M_R = I\alpha \qquad (4)$$

siendo I el momento de inercia del conjunto y α la aceleración angular. En los casos de momentos de inercia variables en el ciclo de trabajo, es suficiente tomar el valor medio. Las potencias correspondientes son:

$$\left.\begin{array}{l} P_M = M_M\omega \\ P_r = M_R\omega \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(M_M - M_R) = \frac{(P_M - P_R)}{\omega} \quad \Rightarrow \qquad (5)$$

$$P_M - P_R = I\alpha\omega = I\omega\frac{d\omega}{dt}$$

Las ecuaciones (1), (2), y (4) pueden sintetizarse en una sola sustituyendo las variables P_M y r. Se obtiene sucesivamente:

$$r = \frac{1}{A}(B - P_R - I\omega\frac{d\omega}{dt}) \qquad (6)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{A}\left(\omega\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right) \qquad (7)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{I}{A}\left(\omega\frac{d^3\omega}{dt^3} + 3\frac{d\omega}{dt}\frac{d^2\omega}{dt^2}\right) \qquad (8)$$

Definitivamente queda la siguiente ecuación diferencial con las variables ω y t:

$$\begin{aligned} &(m\omega^2 - K)(B - P_R - I\omega\frac{d\omega}{dt}) + \\ &mI(\omega\frac{d^3\omega}{dt^3} + 3\frac{d\omega}{dt} + \frac{d^2\omega}{dt^2}) + \\ &CI\left(\omega\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right) + KAr_0 = 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Esta ecuación puede integrarse para unas condiciones iniciales dadas de forma que se pueda estudiar el comportamiento de la velocidad en el tiempo. En la normativa sobre reguladores, los valores de pico, tiempo de respuesta y tiempo de estabilización deben establecerse para el supuesto de un cambio brusco entre plena carga y vacío. Para establecer las condiciones iniciales se utilizará pues el valor P_R correspondiente a la potencia resistente en vacío, el valor ω_1 de la velocidad correspondiente a plena carga para el tiempo $t = 0$ y el valor $r = r_1$ que corresponde a la posición de plena carga y obtenido de la curva característica del regulador. Aplicando estos valores a las ecuaciones (6), (7) y (8) y considerando que $dr/dt = 0$ para $t = 0$, se obtienen las siguientes condiciones iniciales:

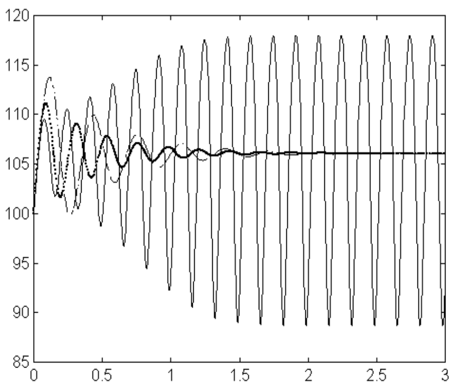
$$\begin{aligned} &\omega = \omega_1 \\ &\frac{d\omega}{dt} = \frac{Ar_1 - B - P_R}{I\omega_1} \\ &\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\left(\frac{Ar_1 - B - P_R}{I\omega_1}\right)^2 \frac{I}{\omega_1} \end{aligned} \qquad (10)$$

En la ecuación (9) encontramos los siguientes parámetros:

- *m, K, C,* r_0*:* son variables de diseño del regulador que pueden ser modificadas u optimizadas de acuerdo con la calidad deseada. Los parámetros *m*, r_0 y *K* están, sin embargo, relacionados por la forma de la curva característica, por lo que no se pueden seleccionar de forma independiente.
- *I:* está condicionado generalmente por otras características de la máquina tales como el peso, la irregularidad cíclica, dimensiones de la máquina, etc., por lo que, en general, para el diseño del regulador hay que partir de valores predeterminados.
- *A* y *B:* son constantes que dependerán de las características de la curva de potencia del motor pero en parte podrán ser establecidas con un adecuado diseño de los órganos de transmisión del regulador.

- ω: es la velocidad de la máquina y por tanto la variable a controlar. Sin embargo no tiene que coincidir forzosamente con la velocidad del regulador (por ejemplo, en el caso de un motor endotérmico, el regulador puede situarse en el cigüeñal, en el árbol de levas, en la bomba de engrase, etc.) Lógicamente el regulador será tanto más sensible cuanto mayor sea su velocidad nominal.

La ecuación (9) puede pues resolverse dando valores a los parámetros que sean compatibles con el diseño del regulador. Generalmente los valores de *K* y *C* determinarán el diseño de los muelles a los que eventualmente habrá que añadir un sistema de amortiguación. Los valores de *m* y r_0 estarán muy relacionados con el espacio disponible.
En la Figura 2 se expone la gráfica de respuesta temporal de un regulador en el que se han establecido los valores de *m*, *I* y r_0 tomándose valores diferentes del amortiguamiento *C*. Puede comprobarse que en uno de los casos se da una vibración autoexcitada .



T = 3 s, ω_0 *= 100 rad/s,* I = 0,5 Kgm^2, R_0 = 0,5 cm
C = 10 (línea contínua, 20 (línea de puntos), 40 (línea discontínua)
Potencia plena carga: 10.000 w
Potencia vacío: 500 w

Figura 2.- Respuestas con variaciones del amortiguamiento:

En la Figura 3 se muestran las respuestas del mismo regulador variando la precompresión del muelle r_0. Estos gráficos nos muestran que, como puede intuirse, la sensibilidad del regulador es mayor a menor precompresión y que, en cambio, el intervalo entre velocidades mínima y máxima disminuye mientras se mejora el tiempo de respuesta.

5.- LINEALIZACIÓN.-

Como se indicó anteriormente, el interés de la linealización de las ecuaciones que determinan el movimiento de un regulador se debe a la facilidad de su estudio según las técnicas de la Teoría de Sistemas, ya que el análisis puede extenderse a los dominios temporal y de frecuencias, determinándose las influencias de los parámetros sobre la estabilidad, valores de pico, tiempo de respuesta, etc.

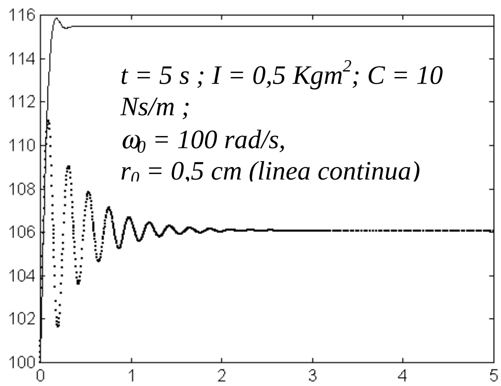


Figura 3.- Variación de la precompresión de los muelles

Sin embargo la linealización puede llevar a resultados muy diferentes de los deseados. Paradójicamente estas diferencias se dan más frecuentemente en los reguladores pequeños.

En general el término de linealización más discutible será el que contiene el factor $\omega^2\ r$. Dado que el valor del cuadrado de la velocidad será muy alto comparado con el del radio de giro, se podrían despreciar en principio las pequeñas variaciones de *r* respecto a ω, asignando un valor medio *L* al primero. Además puede estudiarse el comportamiento de $f = \omega^2$ en lugar de ω. Así, en la ecuación (9) pueden realizarse las siguientes modificaciones:

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\frac{df}{dt} \qquad (11)$$

$$P_M - P_R = \frac{I}{2}\frac{df}{dt} \qquad (12)$$

Obteniéndose de nuevo las expresiones de *r* y sus derivadas:

$$r = \frac{1}{A}\left(B - P_R - \frac{I}{2}\frac{df}{dt}\right) \qquad (13)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{I}{2A}\frac{d^2 f}{dt^2} \qquad (14)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{I}{2A}\frac{d^3 f}{dt^3} \qquad (15)$$

Con lo que la citada ecuación quedaría como sigue:

$$\frac{mI}{2}\frac{d^3\omega}{dt^3}+\frac{CI}{2}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{KI}{2}\frac{df}{dt}+ \quad (16)$$
$$mlfA-K(B-P_R)+KAr_0=0$$

La ecuación anterior es lineal, pero debe ser utilizada con precaución, ya que las desviaciones respecto a los resultados reales, en este caso, son importantes para pequeños valores de *r* medio. Las gráficas de la Figura 4 muestran los resultados de un regulador considerando la forma real y la forma lineal de las ecuaciones del movimiento. Evidentemente los resultados de la linealización no pueden ser utilizados en este caso concreto ya que la respuesta comparada con la forma real es completamente diferente.

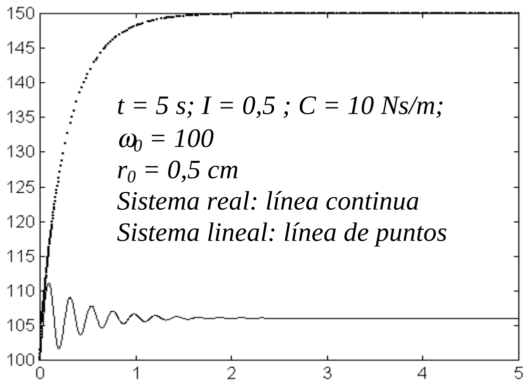


Figura 4.- Resultados de la linealización

En la Figura 5 se expone, sin embargo, el caso de un regulador similar al anterior pero con valores medios de *r* sensiblemente mayores, de forma que sus oscilaciones relativas tienen menos importancia. Este regulador, obviamente, tendría que ser de mayor tamaño.

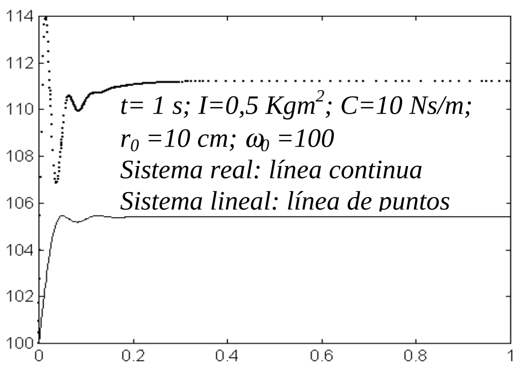


Figura 5.- Regulador más próximo a la forma lineal

Puede observarse que la diferencia de velocidades entre plena carga y vacío es significativamente menor que en el caso anterior y que los tiempos de estabilización son similares. No obstante no ocurre lo mismo con los valores de pico y del tiempo de respuesta.

6.- DISEÑO DEL REGULADOR.-

La exposición anterior ha considerado una serie de simplificaciones en el mecanismo regulador que no influyen, en principio, en la filosofía general del método de diseño. No obstante, en la práctica será necesario abordar otros aspectos del problema. Así, por ejemplo, no se ha considerado el comportamiento dinámico de los diferentes eslabones del mecanismo, además de los contrapesos, y se ha supuesto que había una linealidad en la relación que liga el recorrido de los contrapesos con la potencia suministrada por el motor, lo cual no se dará en la mayoría de los casos. La función real deberá pues introducirse en las ecuaciones expuestas complicando ligeramente la resolución matemática, especialmente cuando la potencia se relacione también con la velocidad, y cuando sea necesario considerar el comportamiento real del par resistente que, en nuestra exposición, hemos asumido como una simple función escalón.

Sin embargo, la metodología expuesta permite realizar un análisis riguroso de los mecanismos de regulación hasta el punto de que nos está permitiendo sintetizar reguladores de dos y tres grados de libertad que aprovechan los efectos de la aceleración tangencial y, especialmente, de la aceleración de Coriolis, para reducir los tiempos de respuesta, valores de cresta, etc., e, incluso, reducir la diferencia entre las velocidades máxima y mínima.

7.- CONCLUSIONES.-

Los reguladores de velocidad son sistemas de control automático de comportamiento no lineal. Las variables matemáticas que definen este comportamiento, tales como la fuerza centrífuga de los contrapesos, la aceleración tangencial y la aceleración de Coriolis, son funciones cuya linealización solo puede realizarse en casos muy limitados sin que los errores introducidos sean importantes.

Pero, además, el análisis de un regulador precisa considerar otras funciones, tales como la curva de potencia del motor y de la máquina y las relaciones dinámicas entre los diversos eslabones de la cadena cinemática que forman el conjunto regulador, que no pueden tampoco ajustarse al comportamiento lineal.

Se ha expuesto, pues, un sistema para analizar o diseñar reguladores de velocidad mediante aplicación de “sofware” de cálculo asumiendo la no linealidad de las funciones de transferencia. Este sistema permite abordar desarrollos de mecanismos de regulación más complejos que los que existen actualmente, tales como reguladores de varios grados de libertad en los que se aprovechan determinados efectos de los cambios de carga para mejorar las características de respuesta.

Los resultados obtenidos con la aplicación de los programas informáticos permiten una optimización del diseño de los mecanismos y mejor estudio de su comportamiento en bancos de prueba antes de la realización de los modelos definitivos.

Referencias.-

[1] LAMADRID, A. *Cinemática y dinámica de máquinas* .E.T.S. de Ingenieros Industriales. Madrid, 1969.

[2] MÁXIMO, C. *Mecanismos.* Ed. Dossat. España, 1973.

[3] OGATA, K. *Ingeniería de Control Moderna.* Prentice Hall,1993.

[4] SHIGLEY, J.E. Standard Handbook of Machine Design. MacGraw-Hill, 1986.