

# DISEÑO ALGEBRAICO DE REGULADORES BIFRECUENCIALES

P. Albertos, J. Salt, A. Cuenca, A. Ibáñez

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática  
Universidad Politécnica de Valencia  
Camino de Vera 14, 46022 Valencia (España)

e-mail: {pedro, julian, acuenca, tibanez}@isa.upv.es

## Resumen

*En muchas aplicaciones industriales de control la actualización de la acción de control puede ser más rápida que la medida de la salida, lo que nos conduce a los reguladores multifrecuencia [2]. En este artículo, además de presentar el modelado en representación interna y externa de este tipo de sistemas, se aborda el diseño de reguladores basándose en las características de cada frecuencia de muestreo disponible. El regulador se divide en dos partes que actúan a diferentes frecuencias de muestreo. En el regulador de frecuencia más baja se determinan los puntos principales de la respuesta deseada mientras que la respuesta en tiempo continuo del sistema controlado es completada por la acción del regulador a frecuencia alta. Reguladores de Cancelación son diseñados usando este enfoque obteniéndose resultados prometedores.*

**Palabras Clave:** Control Multifrecuencial, Control de Robots, Control Digital.

## 1 INTRODUCCIÓN.

Llamamos sistemas muestreados multifrecuencia (MF) a aquellos sistemas muestreados en los cuales dos o más variables son actualizadas a frecuencias distintas.

Control digital multifrecuencia o de muestreo multiperíodico es aquel tipo de control digital en el cual se suceden muestreos a frecuencias distintas.

Como casos particulares del control digital multifrecuencia podemos considerar dos situaciones no convencionales de innegable interés práctico: el muestreo cíclico y el retardo muestreo-acción. En el muestreo cíclico las variables son muestreadas a intervalos variables pero con la existencia de un periodo global  $T$ . Por retraso en el control entendemos la aparición de un retardo entre el muestreo de una salida del proceso y la actualización

de la señal de entrada del mismo bucle de control. Normalmente se considera que el muestreo es síncrono y periódico. Cuando los muestreadores no están sincronizados se habla de sistemas multifrecuencia asíncronos.

El control digital multifrecuencia es un área significativa de investigación y aplicación de notable interés, pues su planteamiento se puede presentar en una serie de situaciones que se dan en un amplio espectro de entornos, como por ejemplo:

- Computador compartido en el tiempo por parte de varios servicios de detección.
- Aplicaciones aeroespaciales, de robótica, de control de procesos químicos, de control del disco duro de un ordenador.
- Situaciones caracterizada por datos perdidos "missing and scarced data".
- Sistemas de control distribuido y multiprocesadores.
- Control en tiempo real.
- Sistemas multivariables.

## 2 MODELADO.

### 2.1 REPRESENTACIÓN INTERNA.

Partimos de la concepción de un bucle de control en el que aparecen tanto sistemas continuos como discretos y diferentes muestreadores, aceptándose que todos los periodos de muestreo involucrados son conmensurables, es decir múltiplos enteros de una cantidad o periodo de tiempo básica que resulta ser, por tanto, el máximo común divisor de todas las magnitudes de muestreo existentes. De forma coherente con este planteamiento surge el mínimo común múltiplo de todos los periodos de muestreo que es la magnitud que permite asegurar una trama ("frame") o periodo global que reproduce la ordenación de los eventos característicos de todas las variables que intervienen en el esquema de control.

Si se considera un sistema continuo lineal invariante en el tiempo de orden  $n$ , este puede quedar descrito por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \mathbf{a}x(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1)$$

considerando un sistema con  $m$  entradas y  $n$  salidas:

- $x(t)$  es el vector de variables de estado, de dimensiones  $n \times 1$ .
  - $u(t)$  es el vector de entradas, de dimensiones  $m \times 1$ .
  - $y(t)$  es el vector de salida, de dimensiones  $l \times 1$ .
- y las matrices que se incluyen, pues, quedan caracterizadas como sigue  $\alpha \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\beta \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathfrak{R}^{l \times n}$ ,  $D \in \mathfrak{R}^{l \times m}$ .

El modelo muestreado a periodo  $T$  puede expresarse de la forma siguiente, si se asume la simplificación de que  $D = 0$ :

$$\begin{aligned} x(t+T) &= A(T)x(t) + B(T)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \quad (D=0) \end{aligned} \quad (2)$$

en las que como es bien conocido:

$$\begin{aligned} A(T) &= e^{\mathbf{a}T} \\ B(T) &= \int_t^{t+T} e^{\mathbf{a}n} \mathbf{b}dn = \int_0^T e^{\mathbf{a}n} \mathbf{b}dn \end{aligned}$$

Con estas premisas de partida, si las acciones de control se retienen mediante un retenedor de orden cero (ZOH) cada  $N$  veces entre dos muestreos de la salida, se puede obtener una representación interna del fenómeno, considerando la siguiente notación:

### Consideración 1.

Se asume que el tiempo entre dos salidas y vectores de estado consecutivos es  $T_0$ , y que se producen  $N$  variaciones de la acción de control en este periodo  $kT_0 + T_i$ ,  $i=1..N$  con  $T_1=0$ , esto es, la primera acción de control coincide con los instantes de muestreo de la salida.

### Lema 1.

Con la consideración 1, el sistema (2) puede quedar modelado de la siguiente forma:

$$x(t+T_0) = A(T_0)x(t) + \sum_{i=1}^N B_i u(t+T_i) \quad (3)$$

en la que como se denotó  $T_{N+1}=T_0$ , y

$$B_i = A(T_0 - T_{i+1})B(T_{i+1} - T_i), \quad \text{para } i=1..N$$

### Lema 2.

En el sistema (3), si la señal de control es constante a trozos en el periodo  $T_0$ ,

$$u(t+T_i) = u_i \quad \forall t, \quad \text{cuando } T_i \leq t \leq T_{i+1}$$

se obtiene que:

$$A(T_0 - T_{i+1})B(T_{i+1} - T_i) = B(T_0 - T_i) - B(T_0 - T_{i+1}), \quad i=1..N$$

### Lema 3.

Aplicando el Lema 2, el sistema (3) queda expresado por el modelo:

$$x[(k+1)T_0] = A(T_0)x(kT_0) + \sum_{i=1}^N B(T_0 - T_i)\Delta u_i(kT_0) \quad (4)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \Delta u_1(kT_0) &= u(kT_0) \\ \Delta u_i(kT_0) &= u(kT_0 + T_i) - u(kT_0 + T_{i-1}), \quad i=2..N \end{aligned}$$

## 2.2 REPRESENTACIÓN EXTERNA.

La intención de este epígrafe es transformar el modelo antes introducido a una descripción externa, por lo que se debe observar un periodo de muestreo regular  $T$ . El operador asociado a este intervalo es el conocido operador adelanto  $q$ . Así pues,  $q^N$  opera con la secuencia de salidas.

Utilizaremos la representación externa asumiendo una composición de la trama en función de una descomposición de señales en tramos extremos de dicha trama, incluyendo series de bloques de adelantos y retardos que posteriormente ubicarán correctamente los diferentes instantes regulares o irregulares de muestreo.

Bajo estas consideraciones el sistema (3) se puede expresar de la siguiente forma:

$$q^N x(t) = A(T_0)x(t) + \sum_{i=1}^N B_i q^{i-1} u(t) \quad (5)$$

o bien de forma compacta:

$$q^s x(t) = A(T_0)x(t) + \tilde{B}(q)u(t) \quad (6)$$

con

$$\tilde{B}(q) = \sum_{i=1}^N [B(T_0 - T_i) - B(T_0 - T_{i+1})] q^{i-1} \quad (7)$$

Como aparece claro,  $\tilde{B}(q)$  es una matriz polinomial, ya que  $B_i$  son vectores de dimensiones  $n \times 1$ . Debe resaltarse que  $\tilde{B}(q)$  está formado por elementos referidos a los intervalos de tiempo considerados en la aplicación.

La intención es introducir un operador capaz de manejar secuencias correspondientes a dos periodos de muestreo distintos. Una forma sencilla de conseguirlo es asumir la transformación matricial de paso a la función de transferencia. Por tanto, si la ecuación de salida considerada en la descripción de estados es:

$$y(t) = C_{n \times 1} x(t) \quad (8)$$

la fórmula de transformación aplicada a (6) y (8), lleva a:

$$\tilde{G}(q) = C [q^N I - A(T_0)]^{-1} \tilde{B}(q) \quad (9)$$

Tomando en cuenta el procedimiento introducido es posible considerar que:

$$\tilde{G}(q) = \sum_{i=1}^N \tilde{G}_i(q) q^{i-1} \quad (10)$$

siendo,

$$\tilde{G}_i(q) = C (q^N I - A)^{-1} [B(T_0 - T_i) - B(T_0 - T_{i+1})] \quad (11)$$

Se debe resaltar que:

- cada  $\tilde{G}_i$  presenta el mismo denominador.
- se deduce una importante característica si se observa detenidamente la suma de  $\tilde{G}_i(q)$ ,

$$\tilde{G}(q) = \sum_{i=1}^N \tilde{G}_i(q) \quad (12)$$

$\tilde{G}(q)$  suministra los parámetros del modelo a baja frecuencia de forma directa.

Si llegado a este punto, se asume la fórmula de Leverrier, entonces:

$$(q^N I - A)^{-1} = \frac{adj(q^N I - A)}{|q^N I - A|} =$$

$$= \frac{I q^{Nn-1} + H_1 q^{Nn-2} + H_2 q^{Nn-3} + \dots + H_{n-1}}{|q^N I - A|} \quad (13)$$

siendo

$$|q^N I - A| = q^{Nn} + t_1 q^{N(n-1)} + t_2 q^{N(n-2)} + \dots + t_n \quad (14)$$

donde  $H_i, t_i$ , para  $i=1 \dots n$ , representan a términos con un sentido definido.

Por consiguiente, se pueden inferir algunas conclusiones interesantes acerca de la descripción externa:

- La mayor potencia del denominador será  $q^{Nn-1}$ . Este polinomio presentará  $Nn-1$  coeficientes para las sucesivas potencias de  $q$ .
- El denominador presenta una forma singular con una potencia máxima  $q^{Nn}$  y exponentes que decrecen de  $N$  en  $N$  hasta  $q^0$ .

Así pues, como antes se explicaba, este operador es capaz de tratar dos secuencias con diferente espaciado temporal.

#### Consecuencia: Sentido de los Parámetros obtenidos.

Una característica especial que presenta esta metodología, es la especial morfología de los términos de la representación externa. Si se denota a la función de transferencia discreta a periodo  $T$  de la forma:

$$G(q) = \frac{Y(q)}{U(q)} = \frac{\mathbf{b}_{1,T} q^{-1} + \dots + \mathbf{b}_{n,T} q^{-n}}{1 + \mathbf{a}_1 q^{-1} + \dots + \mathbf{a}_n q^{-n}} \quad (15)$$

y se lleva a cabo la transformación antes propuesta, se tiene que:

Numerador de  $\tilde{G}(q)$

$$\begin{aligned} q^{-1} &\rightarrow \mathbf{b}_{1,T} \\ q^{-2} &\rightarrow \mathbf{b}_{1,2T} - \mathbf{b}_{1,T} \\ &\vdots \\ &\rightarrow \vdots \\ q^{-N} &\rightarrow \mathbf{b}_{1,NT} - \mathbf{b}_{1,(N-1)T} \\ q^{-[(N)+1]} &\rightarrow \mathbf{d}_{2,T} \\ q^{-[(N)+2]} &\rightarrow \mathbf{d}_{2,2T} - \mathbf{d}_{2,T} \\ &\vdots \\ &\rightarrow \vdots \\ q^{-[(N)+(N)]} &\rightarrow \mathbf{b}_{2,NT} - \mathbf{d}_{2,(N-1)T} \\ &\vdots \\ &\rightarrow \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^{-\{(n-1)N\}+(1)} &\rightarrow k_{n,T} \\
q^{-\{(n-1)N\}+(2)} &\rightarrow k_{n,2T} - k_{n,T} \\
\vdots &\rightarrow \vdots \\
q^{-\{(n-1)N\}+(N)} &= q^{-[nN]} \rightarrow \mathbf{b}_{n,NT} - k_{n,(N-1)T}
\end{aligned} \quad (16)$$

Denominador de  $\tilde{G}(q)$

$$1 + \mathbf{a}_1' q^{-N} + \mathbf{a}_2' q^{-2N} + \dots + \mathbf{a}_n' q^{-nN} \quad (17)$$

Debe notarse que:

- Los parámetros quedan dispuestos en  $n$  grupos de  $N$  coeficientes. Así pues, como es fácil de entender se pueden obtener de forma sencilla los parámetros del numerador de la función de transferencia discreta a  $NT$   $\mathbf{b}_{1,NT}, \mathbf{b}_{2,NT}, \dots, \mathbf{b}_{n,NT}$ . sin más que sumar cada grupo antes referido. Se pueden apreciar otro tipo de elementos que viene expresados por relaciones cruzadas entre polos y residuos correspondientes a distintos periodos de muestreo.
- Como se indica en (9) los parámetros del denominador son los mismos que los relativos a la función de transferencia discreta a  $NT$ .

### 3 DISEÑO ALGEBRAICO

El esquema básico de control multifrecuencia se muestra en la fig.1, donde la planta se representa por un sistema continuo lineal e invariante en el tiempo de una-entrada-una-salida de orden  $n$ , con función de transferencia  $G_p$ . La salida del regulador es actualizada a período  $T$  a través del dispositivo de retención rápido,  $H$ . La salida se mide a período  $NT$  y se compara con la referencia  $R(t)$ , que está siempre disponible, obteniéndose el error para el regulador multifrecuencia  $\bar{G}_{R,N}^T$ . Para simplificar el cómputo, y sin pérdida de generalidad, se asume  $N$  un número entero.

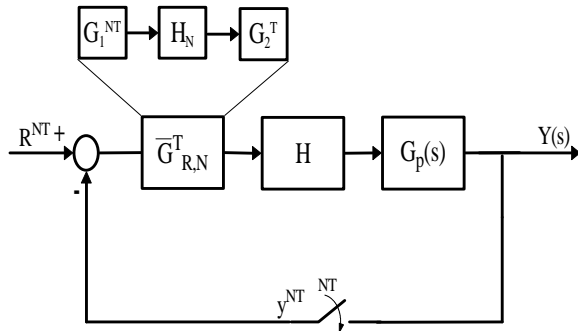


Figura 1: Lazo de Control Multifrecuencia básico.

El regulador multifrecuencia se puede implementar como un regulador periódico. Como se muestra en la figura 1, el regulador multifrecuencia queda compuesto por tres elementos. El error calculado a frecuencia baja es primero procesado por el sub-regulador  $G_1^{NT}$  y pasado a través del convertidor de frecuencia  $H_N^T$ . El segundo y más rápido sub-regulador,  $G_2^T$ , proporciona finalmente la entrada de control al proceso.

Vamos a partir de un modelo monofrecuencia por cada uno de los periodos de muestreo ( $NT$  y  $T$ ). El modelo discreto muestreado rápido está definido de la siguiente manera:

$$G(\bar{z}) = \frac{B(\bar{z})}{A(\bar{z})} = \frac{\sum_{i=1}^n b_{i,T} \bar{z}^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_{i,T} \bar{z}^{-i}} = \frac{Y^T}{U^T} \quad (18)$$

donde  $\bar{z}$  es el operador de desplazamiento retardo unitario  $T$ . Para futuros desarrollos se utiliza la notación  $A(z) \stackrel{\Delta}{=} A^T$  para denominar un polinomio en  $\bar{z}$  (o, como antes, una secuencia  $T$ -espaciada). Los polos de la función de transferencia se denotan por  $\mathbf{a}_{i,T}$ . Es decir:

$$A(\bar{z}) = \prod_{i=1}^n (\bar{z} - \mathbf{a}_{i,T}) \quad (19)$$

El modelo discreto muestreado lento viene dado por:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=1}^n b_{i,NT} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_{i,NT} z^{-i}} = \frac{Y^{NT}}{U^{NT}} \quad (20)$$

De nuevo, utilizando una notación más simple  $A(z) \stackrel{\Delta}{=} A^{NT}$  denotará un polinomio en  $z$  (o una secuencia  $NT$ -espaciada). En este caso los polos serán denotados por  $\mathbf{a}_{i,NT}$ . Así pues:

$$A(z) = \prod_{i=1}^n (z - \mathbf{a}_{i,NT}) \quad (21)$$

Obsérvese que, para un mismo sistema continuo,  $\mathbf{a}_{i,NT} = \mathbf{a}_{i,T}^N; \forall i = 1, \dots, n$ . De lo que se deriva la siguiente relación:

$$W_A(\bar{z}) = \frac{\prod_{i=1}^n (\bar{z}^N - \mathbf{a}_{i,NT})}{\prod_{i=1}^n (\bar{z} - \mathbf{a}_{i,T})}$$

$$W_A(\bar{z}) = \prod_{i=1}^n (\bar{z}^{N-1} + \mathbf{a}_{i,T} \bar{z}^{N-2} + \dots + \mathbf{a}_{i,T}^{N-1}) \stackrel{\Delta}{=} \frac{A^{NT}}{A^T}$$

De la misma manera se pueden obtener polinomios similares  $W(\cdot)$  para cualquier polinomio.

Es también posible introducir los operadores bifrecuencia capaces de expresar la relación entre dos secuencias diferentemente espaciadas en el tiempo. Primero, para una actualización de la entrada más rápida que el muestreo de la salida, el operador es:

$$\bar{G}(\bar{z}) = \frac{\bar{B}(\bar{z})}{A(\bar{z}^N)} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{b}_{i,T} \bar{z}^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_{i,NT} \bar{z}^{-iN}} = \frac{\bar{B}^T}{A^{NT}} = \frac{Y^{NT}}{U^T}$$

Como ya se ha comentado en el epígrafe de modelado, una característica especial de este operador bifrecuencia es la siguiente: los parámetros del numerador de  $\bar{B}^T$  están distribuidos en  $n$  grupos de  $N$  coeficientes en los que la suma de cada uno de estos grupos es igual al coeficiente del numerador del proceso discretizado a periodo lento. Así pues es posible obtener el modelo lento a partir del modelo rápido (o partir del modelo bifrecuencia)[Albertos et alters, 1996].

Como el polinomio  $(A^{NT})^T$ , tiene ceros en los instantes  $T$  no múltiplos de  $NT$ , se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} (A^{NT})^T Y^{NT} &= A^{NT} Y^{NT} \\ (A^{NT})^T Y^T &= A^{NT} Y^T \\ (A^{NT} Y^T)^{NT} &= A^{NT} Y^{NT} \\ (A^T (Y^{NT})^T)^{NT} &= (A^T)^{NT} Y^{NT} \end{aligned}$$

Así pues, el operador bifrecuencia viene dado por:

$$\bar{G}^T = \frac{\bar{B}^T}{(A^{NT})^T}$$

Basándose en la definición del polinomio  $W(z)$ , se puede expresar facilmente:

$$G(\bar{z}) = \frac{Y(\bar{z})}{U(\bar{z})} = \frac{B^T}{A^T} = \frac{B^T}{A^T} \frac{W_A^T}{W_A^T} = \frac{\bar{B}^T}{(A^{NT})^T} = \frac{Y^T}{U^T}$$

Por lo tanto,  $(A^{NT})^T Y^T = \bar{B}^T U^T$ .

Así pues dado un proceso continuo,  $G_p(s)$ , se diseña un regulador continuo  $G_R(s)$  para alcanzar una función de transferencia en bucle cerrado  $M(s)$ . Si se asume un modo de operación monofrecuencia (todas las operaciones S/H a la misma frecuencia) para la implementación del regulador, es decir para un regulador rápido o lento  $G_R^T$ , o  $G_R^{NT}$ , el proceso controlado viene dado, como se muestra en la fig. 1, por:

$$M^T = \frac{Y^T}{U^T} = \frac{G_p^T G_R^T}{1 + G_p^T G_R^T}; \quad \text{o} \quad (22)$$

$$M^{NT} = \frac{Y^{NT}}{U^{NT}} = \frac{G_p^{NT} G_R^{NT}}{1 + G_p^{NT} G_R^{NT}}$$

respectivamente. Los reguladores discretos,  $G_R^T$  o  $G_R^{NT}$ , pueden ser diseñados o bien para seguir el comportamiento discreto de  $M(s)$ , o mediante la discretización del regulador continuo  $G_R(s)$ . En cualquier caso, cuanto mayor sea el periodo de muestreo peor será el comportamiento intermuestreo de la salida.

Se debe diseñar un regulador multifrecuencia para alcanzar el rendimiento del sistema controlado a frecuencia rápida a partir de una secuencia de medidas de la salida a frecuencia lenta. El resultado se puede expresar como sigue [1].

**Teorema 1.** Dado un proceso continuo  $G_p(s)$ , y un modelo de referencia  $M(s)$  para el sistema controlado, asumiendo una frecuencia de actualización de control  $1/T$ , y la salida muestreada a frecuencia  $1/NT$ , fig.1, se define el regulador bifrecuencia  $\bar{G}_{R,N}^T = G_2^T H_N^T G_1^{NT}$  donde:

- la parte rápida viene dada por  $G_{RR}^T = \frac{M^T}{G_p^T}$
- la parte lenta viene dada por

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M^{NT}}$$

- y  $H$  es un convertidor de frecuencia

$$H_N^T = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

- 1) Para cambios en escalón en la referencia, alcanzará el mismo rendimiento discreto que el

regulador rápido, pero utilizando una frecuencia de muestreo lenta para la salida.

- 2) Si  $M^T$  se obtiene mediante (22), se puede evitar el rizado intermuestreo, pero la respuesta no coincide con la respuesta continua.
- 3) Resultados similares se pueden derivar para otras referencias de entrada con un convertidor de frecuencia generalizado,  $H_{1,N}^T$ .

Se plantea el diseño de un sistema multifrecuencia donde se apliquen acciones de control a frecuencia rápida para compensar la frecuencia baja de acceso al sistema de medida.

Se trabajará así pues con el sistema de la figura 2, siendo equivalente el desarrollo para el caso en el que la frecuencia del sistema de medida sea más rápida que la frecuencia de aplicación de las acciones de control.

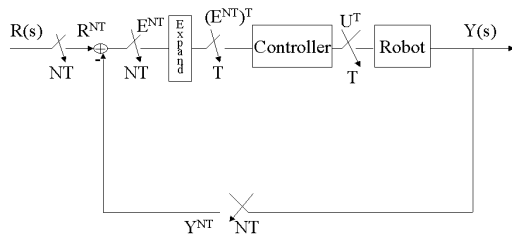


Figura 2: Esquema básico de Control Multifrecuencia.

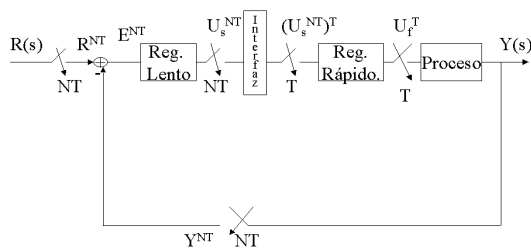


Figura 3: Esquema lento/rápido de Control Multifrecuencia.

Como se puede observar en el diagrama de bloques de la figura 2, el regulador es alimentado mediante una señal de periodo  $NT$  produciendo una señal de salida a periodo  $T$ . Mediante la metodología de Salt, se divide este regulador en dos subreguladores, uno trabajando a frecuencia lenta  $NT$  y otro trabajando a

frecuencia rápida  $T$ . Para simplificar el cómputo, y sin pérdida de generalidad, se asume  $N$  un número entero. El diagrama de bloques resultante se muestra en la figura 3.

### 3.1. REGULADORES DE TIEMPO MÍNIMO.

Como es bien sabido [3], el procedimiento para obtener un comportamiento de tiempo mínimo conduce a plantear las dos ecuaciones diofánticas:

$$\tilde{M}(\bar{z}^{-1}) = W_R(\bar{z}^{-1})\bar{z}^{-d}\Omega(\bar{z}^{-1})$$

$$1 - M(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^R \prod_j (1 - \mathbf{a}_{j,T}^N z^{-1}) \Lambda(z^{-1})$$

donde:

- $W_R(\bar{z}^{-1})$ : polinomio construido en base a la referencia utilizada, y que tendrá la siguiente forma:
$$W_R(\bar{z}^{-1}) = (1 + \dots + \bar{z}^{-(N-1)})^R$$
 donde  $N$  es la multiplicidad y  $R$  el orden de la referencia
- $d$ : diferencia entre el número de polos y ceros del proceso. Permite asegurar la realizabilidad.
- $(1 - \bar{z}^{-1})^R$ : Polinomio construido en base a la referencia. Asegura que el polinomio  $1 - M(z^{-1})$  sea de grado finito.
- $\prod_j (1 - \mathbf{a}_{j,T}^N z^{-1})$ : Polos del proceso  $G(z)$  de módulo  $\geq 1$ .

La inclusión (aquí y en posteriores planteamientos) del polinomio  $W_R(\bar{z}^{-1})$ , se debe a que el error en régimen permanente debe ser cero.

### 3.2 REGULADORES DE TIEMPO FINITO.

En este caso aparecen dos planteamientos:

**1<sup>er</sup> Planteamiento:**

$$\tilde{M}(\bar{z}^{-1}) = W_R(\bar{z}^{-1})W_A^*(\bar{z}^{-1}) \prod_i (1 - \mathbf{b}_{i,T} \bar{z}^{-1}) \bar{z}^{-d} \Omega(\bar{z}^{-1})$$

$$1 - M(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^R \prod_j (1 - \mathbf{a}_{j,T}^N z^{-1}) \Lambda(z^{-1})$$

Es igual al de Tiempo Mínimo solo que ahora se deben tener en cuenta en  $\tilde{M}(\bar{z}^{-1})$  los ceros de fuera del círculo unidad  $\prod_i (1 - \mathbf{b}_{i,T} \bar{z}^{-1})$ , con el fin de asegurar la estabilidad.

## 2º Planteamiento:

$$\begin{aligned}\tilde{M}(\bar{z}^{-1}) &= W_R(\bar{z}^{-1})\bar{B}(\bar{z}^{-1})\bar{z}^{-d}\Omega(\bar{z}^{-1}) \\ 1 - M(z^{-1}) &= (1 - z^{-1})^R \prod_j (1 - \mathbf{a}_{j,T}^N z^{-1}) \Lambda(z^{-1})\end{aligned}$$

Es un planteamiento más completo, donde:

- $W_R(\bar{z}^{-1})$ : igual que en el caso anterior.
- $\bar{B}(\bar{z}^{-1})$ : numerador del operador bifrecuencia. Este término hace que el regulador sea de tiempo finito, eliminando las oscilaciones intermuestreo. Como es bien sabido  $\bar{B}(\bar{z}^{-1}) = B^T W_A^T$ .
- $\prod_j (1 - \mathbf{a}_{j,T}^N z^{-1})$ : todos los polos del proceso.

## 4 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIOFÁNTICAS BIFRECUENCIALES.

Una vez se ha decidido el tipo de regulador que se pretende diseñar, es decir de tiempo mínimo o tiempo finito, se aplicarán las ecuaciones obtenidas en el apartado anterior. Así pues se deberán estudiar los órdenes de las dos ecuaciones para ajustar los órdenes de los polinomios  $\Omega(\bar{z}^{-1})$  y  $\Lambda(z^{-1})$ .

Intentaremos hacer el polinomio  $\Lambda(z^{-1})$  del menor orden posible, pero siempre teniendo en cuenta que:

$$\tilde{m} = Nm$$

donde  $\tilde{m} = \text{ord}(\tilde{M}(\bar{z}^{-1}))$  y  $m = \text{ord}(M(z^{-1}))$ .

Se propondrá por lo tanto el polinomio  $\Lambda(z^{-1})$  de grado  $\lambda$ , ajustando el polinomio  $\Omega(\bar{z}^{-1})$  de grado  $\theta$ , para cumplir la ecuación correspondiente a  $\tilde{M}(\bar{z}^{-1})$  de forma coherente.

Una vez planteadas las ecuaciones diofánticas se supondrá que los polinomios  $\tilde{M}(\bar{z}^{-1})$  y  $M(z^{-1})$  tienen la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{M}(\bar{z}^{-1}) &= \tilde{m}_1 \bar{z}^{-1} + \tilde{m}_2 \bar{z}^{-2} + \dots + \tilde{m}_i \bar{z}^{-i} \\ M(z^{-1}) &= m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots + m_j z^{-j}\end{aligned}$$

dependiendo de los grados de las ecuaciones planteadas. A continuación y por igualación de coeficientes se construirá un sistema de ecuaciones mediante las  $\tilde{m}$  ecuaciones obtenidas de la primera ecuación diofántica y las  $m$  ecuaciones obtenidas de la segunda ecuación diofántica. Con el objetivo de establecer las ecuaciones de ligadura, hecho éste fundamental para relacionar las ecuaciones a

diferente frecuencia, cabe hacer mención a la expresión (23), según la cual:

$$(\bar{Y}^T)^{NT} = (\bar{M}_N^T)^{NT} (R^T)^{NT} = M^{NT} R^{NT} = Y^{NT} \quad (23)$$

se fija, pues, el hecho de que las repuestas de los bucles cerrados bifrecuenciales y lento deben coincidir en los instantes  $K_1 NT$ . Evidentemente este preciso aspecto nos permite establecer la forma de las ecuaciones de ligadura. Para los casos más normales de diseño referido a entradas polinomiales tipo escalón y rampa se tendrán las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\text{Caso escalón. } [M_N^T R^T]^{NT} &= \left[ \frac{w_1 \bar{z}^{-1} + w_2 \bar{z}^{-2} + w_3 \bar{z}^{-3} + w_4 \bar{z}^{-4} + \dots}{1 - \bar{z}^{-1}} \right]^{NT} = \\ &= \left[ w_1 \bar{z}^{-1} + (w_1 + w_2) \bar{z}^{-2} + (w_1 + w_2 + w_3) \bar{z}^{-3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \bar{z}^{-4} + \dots \right]^{NT} = \\ &= (w_1 + w_2) \bar{z}^{-2} + (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \bar{z}^{-4} + \dots\end{aligned}$$

La posterior igualación de coeficientes de potencias análogas conduce a las referidas ligaduras. En este caso concreto:

$$\begin{aligned}w_1 + w_2 &= m_1 \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= m_1 + m_2\end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga para el caso de una rampa se obtendría que:

$$\begin{aligned}2w_1 + w_2 &= m_1 \\ 4w_1 + 3w_2 + 2w_3 + w_4 &= 2m_1 + m_2\end{aligned}$$

Por tanto, el propio redimensionamiento y desarrollo en potencias de las ecuaciones diofánticas nos ofrecerán mecánicamente esta solución.

Además el número de incógnitas deberá ser igual que el número de ecuaciones para que se pueda resolver el sistema de ecuaciones. En el caso de que “Número de incógnitas > Número de ecuaciones” existirán grados de libertad, lo que significa que se deberán considerar “Número de incógnitas - Número de ecuaciones” ecuaciones para poder resolver el sistema de ecuaciones. Estas ecuaciones podrían ser las  $\tilde{m}_i$  de mayor grado igualadas a 0, tantas como se necesiten, consiguiendo además hacer más rápido el regulador puesto que las últimas acciones de control a periodo rápido serán 0. La existencia de estos grados de libertad también puede implicar la selección de puntos intermedios de  $\tilde{M}(\bar{z}^{-1})$  en instantes  $KT$  distintos de los  $K_1 NT$ .

## 5 EJEMPLOS.

### 5.1. PROCESO $G_1(s)$ .

El proceso  $G_1(s)$  es el siguiente:

$$G_1(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+20s)}$$

Los parámetros de diseño son  $T=3$  segundos y  $N=3$  (multiplicidad). Entonces al discretizar  $G_1(s)$  con un periodo  $T/N=1$  segundo, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G_1(\bar{z}^{-1}) = \frac{0.0024(1+0.951\bar{z}^{-1})\bar{z}^{-1}}{(1-0.951\bar{z}^{-1})(1-0.905\bar{z}^{-1})}$$

Si se realiza un primer diseño en Tiempo Mínimo, se plantean las siguientes ecuaciones diofánticas:

$$\tilde{M}(\bar{z}^{-1}) = (1 + \bar{z}^{-1} + \bar{z}^{-2})^2 \cdot \bar{z}^{-1} \cdot (\Omega_0 + \Omega_1 \bar{z}^{-1})$$

$$1 - M(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2 \cdot \Lambda_0$$

Tras resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes reguladores:

$$G_{RR}(\bar{z}^{-1}) = \frac{(1.333 - 0.808\bar{z}^{-1} + 0.054\bar{z}^{-2} - 2.611\bar{z}^{-3} + 1.673\bar{z}^{-4} - 0.049\bar{z}^{-5} + 1.282\bar{z}^{-6} - 0.861\bar{z}^{-7})}{0.0024 + 0.0022\bar{z}^{-1}}$$

$$G_{RL}(\bar{z}^{-1}) = \frac{1}{1 - 2\bar{z}^{-1} + \bar{z}^{-2}}$$

Tras simular el comportamiento del sistema con estos reguladores, se observa que el sistema contiene una sucesión de acciones de control bruscas en forma de sierra, que hacen que el sistema tarde en estabilizarse. Este efecto se aprecia claramente en la figura 4, donde se muestran dichas acciones de control.

Si se aborda un segundo diseño, pero ahora en Tiempo Finito, ubicando en el polinomio  $W$  los dos polos del proceso, se plantean las siguientes ecuaciones diofánticas:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\bar{z}^{-1}) &= (1 + \bar{z}^{-1} + \bar{z}^{-2})^2 \cdot (0.0024\bar{z}^{-1}) \cdot \\ &\cdot (1 + 0.951\bar{z}^{-1}) \cdot (1 + 0.951\bar{z}^{-1} + 0.951^2\bar{z}^{-2}) \cdot \\ &\cdot (1 + 0.905\bar{z}^{-1} + 0.905^2\bar{z}^{-2}) \cdot (\Omega_0 + \Omega_1\bar{z}^{-1} + \Omega_2\bar{z}^{-2}) \end{aligned}$$

$$1 - M(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2 \cdot (\Lambda_0 + \Lambda_1 z^{-1} + \Lambda_2 z^{-2})$$

Tras resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes reguladores:

$$G_{RR}(\bar{z}^{-1}) = \frac{(0.14 + 0.296\bar{z}^{-1} + 0.338\bar{z}^{-2} - 0.124\bar{z}^{-3} - 0.641\bar{z}^{-4} - 0.752\bar{z}^{-5} - 0.184\bar{z}^{-6} + 0.456\bar{z}^{-7} + 0.552\bar{z}^{-8} + 0.244\bar{z}^{-9} - 0.106\bar{z}^{-10} - 0.134\bar{z}^{-11} - 0.072\bar{z}^{-12})}{0.0024 + 0.0022\bar{z}^{-1}}$$

$$G_{RL}(z^{-1}) = \frac{1}{1 - 1.25z^{-1} - 0.50z^{-2} + 0.75z^{-3}}$$

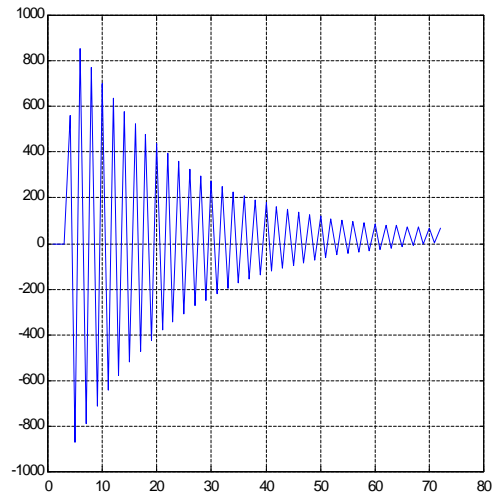


Figura 4: Acciones de control T. Mínimo.

Tras simular el comportamiento del sistema con estos reguladores, se observa que el sistema hace un seguimiento de la salida ante una referencia rampa sin ningún tipo de sobreoscilación (ver figura 5)

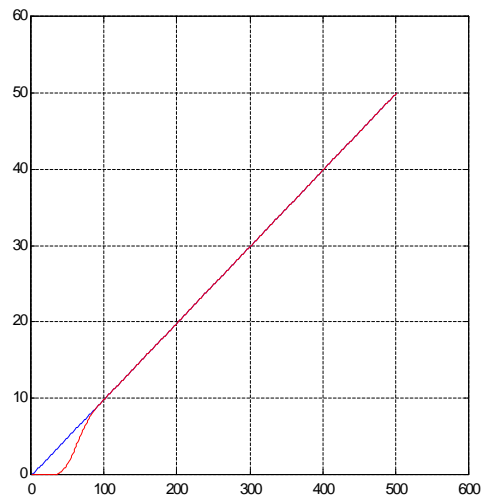


Figura 5: Referencia vs. Salida T. Finito.

## 5.2. PROCESO $G_2(s)$ .

El proceso  $G_2(s)$  es el siguiente:

$$G_2(s) = \frac{1}{(1+10s)(1-20s)}$$

Los parámetros de diseño son  $T=3$  segundos y  $N=3$  (multiplicidad). Entonces al discretizar  $G_2(s)$  con un periodo  $T/N=1$  segundo, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G_2(\bar{z}^{-1}) = \frac{-0.00246\bar{z}^{-1}(1+0.983\bar{z}^{-1})}{(1-1.051\bar{z}^{-1})(1-0.905\bar{z}^{-1})}$$

Si se aborda un diseño en Tiempo Finito, ubicando en el polinomio  $W$  tanto el polo inestable como el estable, se plantean las siguientes ecuaciones diofánticas:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\bar{z}^{-1}) &= (1 + \bar{z}^{-1} + \bar{z}^{-2})^2 \cdot (-0.00246\bar{z}^{-1}) \cdot \\ &\cdot (1 + 0.983\bar{z}^{-1}) \cdot (1 + 1.051\bar{z}^{-1} + 1.051^2\bar{z}^{-2}) \cdot \\ &\cdot (1 + 0.905\bar{z}^{-1} + 0.905^2\bar{z}^{-2}) \cdot \\ &\cdot (\Omega_0 + \Omega_1\bar{z}^{-1} + \Omega_2\bar{z}^{-2} + \Omega_3\bar{z}^{-3} + \Omega_4\bar{z}^{-4} + \Omega_5\bar{z}^{-5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - M(z^{-1}) &= (1 - z^{-1})^2 \cdot (1 - 1.051^3 z^{-1}) \cdot \\ &\cdot (1 - 0.905^3 z^{-1}) \cdot (\Lambda_0 + \Lambda_1 z^{-1}) \end{aligned}$$

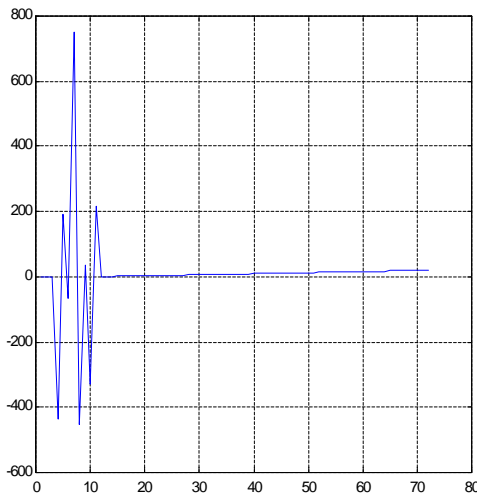


Figura 6: Acciones de control.

Tras resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes reguladores:

$$G_{RL}(z^{-1}) = \frac{1}{1 - 3.90z^{-1} + 5.67z^{-2} - 3.62z^{-3} + 0.86z^{-4}}$$

$$\begin{aligned} &(1.070 + 0.576\bar{z}^{-1} - 0.303\bar{z}^{-2} - \\ &- 3.829\bar{z}^{-3} - 1.864\bar{z}^{-4} + 1.606\bar{z}^{-5} + \\ &+ 5.171\bar{z}^{-6} + 2.262\bar{z}^{-7} - 2.833\bar{z}^{-8} - \\ &- 3.139\bar{z}^{-9} - 1.243\bar{z}^{-10} + 2.051\bar{z}^{-11} + \\ &+ 0.722\bar{z}^{-12} + 0.264\bar{z}^{-13} - 0.526\bar{z}^{-14}) \\ G_{RR}(\bar{z}^{-1}) &= \frac{-0.00246(1 + 0.983\bar{z}^{-1})}{-0.00246(1 + 0.983\bar{z}^{-1})} \end{aligned}$$

Como resultado de la simulación del regulador bifrecuencia obtenido se puede observar en la figura 6 las acciones de control y en la figura 7 el seguimiento de la salida ante una referencia rampa.

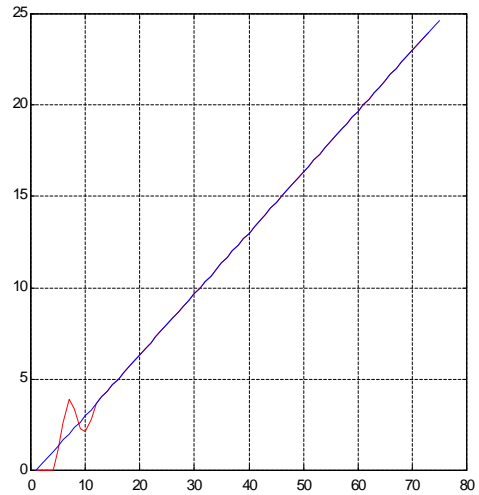


Figura 7: Referencia vs Salida.

## Conclusiones.

En el presente documento se ha puesto de manifiesto la viabilidad de los diseños realizados basados en la representación externa, de los reguladores discretos de Cancelación en un esquema multifrecuencial, centrándose en el caso de plantas muestreadas de forma lenta y que requieren un control a mayor frecuencia, que presentan un especial interés en las aplicaciones estudiadas. Aprovechando el bagaje de modelado de este tipo de esquemas, se ha demostrado que es posible la consideración de reguladores que presentan asimismo una estructura no-convencional. Este tipo de reguladores facultan la obtención de un bucle cerrado con una respuesta intermuestreo aceptable y en determinados casos carente de oscilaciones ocultas, hecho éste, común en las aplicaciones multifrecuenciales, si se observa la no cancelación de ceros de la función de transferencia del proceso.

Resulta significativa la introducción y comprensión de los denominados polinomios  $W$  cuya consideración resulta primordial en este tipo de esquemas.

Así pues, se ha discutido el diseño de reguladores multifrecuencia para alcanzar con un muestreo de salida lento los mismos rendimientos que el sistema de control con muestreo rápido. El resultado principal es una aproximación de diseño basada en el comportamiento del proceso controlado de forma rápida y lenta.

### **Referencias**

- [1] Albertos, P., Salt, J., Tornero, J. (1996) “*Dual Rate Adaptive Control. Automatica.*” vol.AC-32, n. 7, pp. 1027-1030.
- [2] Salt, J., Valera, A., Cuenca, A., Ibáñez, A., (2000) “*Industrial Robot Multi-Rate Control with the VxWorks Real-Time Operating System*” IFAC AARTC'2000 Palma Mallorca.
- [3] Salt, J. “*Control de Procesos Industriales con Muestreo No-convencional*” (1992). Tesis Doctoral Dpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática Universidad Politécnica de Valencia.